ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

14. мај 2015

Професор: Игор Долинка

Асистент: Бојан Башић

1. Знајући да важи
$$(4005 \cdot 6!)^3 = \overline{5\,021\,004\,40a\,22b\,000\,000\,000\,000}_6,$$
одредити цифре a и b.

2. У скупу ненегативних целих бројева решити једначину $2^{8x} = 151^y + 65535$.

   Једна идеја: Најпре посматрати једначину по погодном модулу, одабраном тако да једна страна једначине буде конгруентна с константом за све довољно велике вредности одређене променљиве. Одатле закључити каквог облика мора бити друга променљива. Затим добити контрадикцију посматрањем једначине по новом модулу, одабраном директним испробавањем „малих“ кандидата.

3. Доказати: ако је за природне бројеве n и m испуњено $n\varphi(n) = m\varphi(m)$, тада важи $n = m$.

   Једна идеја: Записати n у каноничком облику: $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$. Приметити да тада важи
$$n\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{2\alpha_i - 1}(p_i - 1).$$
   Установити како се на основу вредности $n\varphi(n)$ може идентификовати бар један прост фактор броја n (напомена: уколико је задата само вредност $n\varphi(n)$ али не и горњи запис, само на основу те вредности не могу се директно одредити фактори $p_1, p_2, \ldots, p_k$, и потребна је одређена досетка како би се идентификовао бар један од ових фактора); потом установити да се, за идентификован прост фактор, може лако одредити и његов експонент у броју n. Констатовати да се, уколико и $m\varphi(m)$ има исту вредност, тада исти овај прост фактор јавља и у броју m, и то с истим експонентом. Надограђивањем ове идеје довршити доказ.